1. Oscillations du pendule (9 Points)

(0,5) 1.1 $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{frott^{nt}} = \vec{T} + m\vec{g} - \alpha\vec{v}$

(0,5) 1.2 $m\ddot{x} = -T\sin\theta - \alpha\dot{x} = -mg\sin\theta - \alpha\dot{x}$

(0,5) ω_0^2 / 2× (0,5) ω_0 et τ 1.3 $\sin\theta = \frac{x}{L}$ d'où $\ddot{x} + \frac{g}{L}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0$.

$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0^2 = g/L$ et $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$

2×(0,5) ω_0 pulsation propre de l'oscillateur harmonique

$\frac{1}{\tau}$ caractérise l'amortiss^{nt}, τ le temps de relaxation du système

1.4 $x = Ke^{rt} \Rightarrow r^2 + \frac{1}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4\tau^2\omega_0^2} - 1\right)$

$\tau\omega_0 \gg \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4\tau^2\omega_0^2} \ll 1 \Leftrightarrow \Delta < 0.$

(2) racines du type $r_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\tau^2\omega_0^2}} \simeq -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0$

(1) 1.5 sol^{c} $x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$

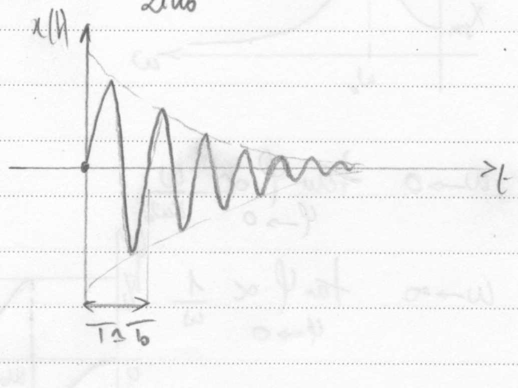
$= e^{-t/2\tau}\left(Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}\right)$

1.6 $v(0) = v_0 \quad x(0) = 0$. (CI)

$$\begin{cases} x(0) = 0 = A + B \\ \dot{x}(0) = v_0 = -\frac{1}{2\tau}(A+B) + i\omega_0(A-B) = i\omega_0(A-B) \end{cases}$$

(1) $$\begin{cases} B = -A \\ A = \frac{v_0}{2i\omega_0} \end{cases} \qquad x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}e^{-t/2\tau}\sin(\omega_0 t)$$ (0,5)

(1)



IMPRIMERIE NATIONALE 3012567 1

2. Oscillations forcées (11 points)

2.1 $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg\sin\theta \qquad \sin\theta = \dfrac{x - X_s}{L}$ (0,5)

$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg\dfrac{x - X_s}{L}$

$\ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{g}{L}x = \dfrac{g}{L}X_s \iff \ddot{x} + \dfrac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_{sm}$ const

2.2 (0,5) sol$^{\text{e}}$ générale de l'éq$^{\text{e}}$ sans 2$^{\text{nd}}$ membre + sol$^{\text{e}}$ particulière de l'éq$^{\text{e}}$ avec 2$^{\text{nd}}$ membre

$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$

2.3 (0,5) sol$^{\text{e}}$ obtenue en 1.5 ou 1.6 $\quad x_g(t) = e^{-t/2\tau}\left(Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}\right)$

$= e^{-t/2\tau}\dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

(0,5) ce terme devient négligeable quand $t \gg \tau$. on peut donc ne s'intéresser qu'au régime permanent

2.4 (0,5) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

(0,5) A amplitude, ω pulsation, et φ phase

2.5 Calcul en complexes

$-\omega^2 \underline{x_m} + \dfrac{i\omega}{\tau}\underline{x_m} + \omega_0^2\underline{x_m} = \omega_0^2 X_{sm}$

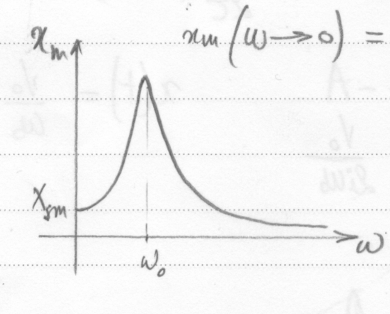
x_m (1,5) $\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \dfrac{i\omega}{\tau}\right)x_m e^{i\varphi} = \omega_0^2 X_{sm}$

$\tan\varphi$ (1,5)

$x_m = \dfrac{\omega_0^2 X_{sm}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2\right]^{1/2}} \qquad \tan\varphi = \dfrac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = \dfrac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2}$

2.6 $\omega_m \simeq \omega_0 \qquad x_m(\omega_0) = \dfrac{\omega_0^2 X_{sm}}{\omega_0/\tau} = \omega_0\tau X_{sm}$

3×(0,5) $\quad x_m(\omega \to 0) = X_{sm} \qquad x_m(\omega \to \infty) = 0$



Courbe (1)

2.7 3×(0,5) $\omega \to 0 \quad \tan\varphi \propto -\dfrac{\omega}{\tau\omega_0^2} \quad \varphi \to 0 \qquad \omega \to \omega_0^{\pm} \quad \tan\varphi \to \pm\infty \quad \varphi \to \pm\pi/2$

$\omega \to \infty \quad \tan\varphi \propto \dfrac{1}{\omega} \quad \varphi \to 0$

Courbe (1)